GEOFIZIKA	Vol. 1	1984

Izvorni znanstveni rad

Poopćenje analitičkog oblika Wadatijeve metode lociranja žarišta blizih potresa

Mladen Živčić, Ivo Allegretti i Dragutin Skoko

Geofizički zavod, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb

Primljeno 14. prosinca 1983.

UDK 550.341

Koordinate x, y, i z žarišta potresa i konstanta $c = V_pV_s/(V_p-V_s)$ određene su primjenom metode najmanje sume kvadrata odstupanja na jednadžbe rasprostiranja seizmičkih valova. Time je dobiven jedinstven postupak za primjenu analitičkog oblika Wadatijevog grafičkog načina određivanja položaja žarišta potresa na podatke proizvoljnog broja ($N \geqslant 4$) seizmoloških postaja. Opisanim postupkom izbjegnut je uvjet da sve postaje moraju ležati u istoj ravnini i time omogućeno uključivanje u račun i nadmorskih visina postaja. Pri obradi podataka pet i više seizmoloških postaja moguć je i račun standardnih devijacija kao kvantitativne mjere točnosti rezultata.

Generalization of the analytical form of Wadati's method for near earthquake hypocentre determination

The original Wadati's graphical method for the earthquake hypocentre location is already presented in analytical form (Allegretti et al., 1984). However, the described method was restricted to the use of the data of four seismological stations. In this paper the equations (Eq. 1.) of seismic wave propagation are solved for the hypocentre coordinates x, y, z and the constant $c = V_pV_s/(V_p-V_s)$ by the use of the least squares method. Providing that approximate values of x, y, z and c are known (usually it is sufficient to approximate the starting epicenter coordinates x', y', with the coordinates of the station with the minimal t_s-t_p time) the least squares method is applied to the error equations (Eqs. 4.). Due to the high rate of convergence it is sufficient to perfrom only a few iterations. This enables the use of the greater number of seismological stations and, as a consequence, the greater precision of the results. The error estimation is also possible giving the quantitative measure of the precision of the results obtained. It is also shown that Wadati's method could be extended to include the seismic station height differences. This may be applied in the rock bursts investigations too.

1. Uvod

Jedan od načina na koji je moguće grafičku metodu K. Wadatija (Wadati, 1928) za određivanje položaja žarišta potresa predočiti u analitičkom obliku opisan je u prethodnom radu (Allegretti i dr., 1984). Time je omogućena izvedba metode na računskom stroju, što bitno pojednostavljuje i ubrzava postupak lociranja žarišta potresa. Prikazani postupak, međutim, ograničen je na primjenu podataka samo četiriju seizmoloških postaja, u kojem je slučaju rješenje matematički jedinstveno. Ponekad se, pak, raspolaže podacima o razlici $t_s - t_p$ nastupnih vremena transverzalnih i longitudinalnih valova potresa na pet ili više postaja. Opisana je metoda zahtijevala da se položaj žarišta odredi neovisno za sve moguće kombinacije od po četiri postaje. Ukoliko sve četiri ne leže na istom pravcu to rezultira s $n = N!/4!(N-4)!$ (gdje je N broj postaja za koje se raspolaže podatkom o $t_s - t_p$) općenito različitih i jednako vrijednih rješenja za položaj žarišta potresa i vrijednost konstante $c = V_p V_s / (V_p - V_s)$. Postavlja se pitanje koje od tih n rješenja izabrati kao najbolje i na koji ga način odrediti.

U ovom će se radu prikazati način na koji je Wadatijevu metodu određivanja položaja žarišta potresa u analitičkom obliku moguće primijeniti na proizvoljan broj N seizmoloških postaja, $N \geqslant 4$.

2. Teorija

Kao i u prethodnom radu polazi se od jednadžbe rasprostiranja seizmičkog vala u homogenom izotropnom sredstvu

$$R_i - V\,T_i = 0 \tag{1}$$

gdje je: R_i – udaljenost i–te seizmološke postaje od ishodišta vala, tj. žarišta potresa,
V – brzina rasprostiranja seizmičkog vala za koju se pretpostavlja da je u čitavom promatranom prostoru konstantna,
T_i – vrijeme putovanja seizmičkog vala od žarišta potresa do i–te seizmološke postaje.

Zbog pretpostavki iznesenih u (Allegretti i dr., 1984) potrebno je ograničiti se na male udaljenosti od žarišta potresa te se može zanemariti utjecaj zakrivljenosti Zemljine površine i sve odnose promatrati u pravokutnom koordinatnom sustavu. Neka je os x tog sustava usmjerena prema istoku, os y prema sjeveru, a os z vertikalno prema dolje. Pretpostavit će se još i da se sve seizmološke postaje nalaze u ravnini z = 0. Tad je udaljenost seizmološke postaje od žarišta

$$R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2}$$

gdje su x_i, y_i koordinate postaje ($z_i = 0$, $i = 1, \ldots, N$), a x, y, z koordinate žarišta potresa.

Daljni postupak se može provoditi za bilo koju vrst vala za koji vrijedi da mu je brzina stalna u promatranom prostoru. Upotreba longitudinalnih ili transverzalnih valova potresa zahtijeva, međutim, poznavanje točnog vremena nastanka potresa u žarištu tako da će i pogreška u njegovom određivanju povećavati pogrešku koordinata x, y, z žarišta kao konačnog rezultata. Stoga će se za određivanje koordinata žarišta rabiti fiktivan val S–P za koji je u (Allegretti i dr., 1984) pokazano da se rasprostire brzinom $c = V_p V_s/(V_p - V_s)$ i za koji je vrijeme putovanja jednako razlici $T_{PS} = t_s - t_p$ nastupnih vremena t_s transverzalnog i t_p longitudinalnog vala potresa, dakle ne ovisi o apsolutnom vremenu. Označi li se ta razlika za i–tu postaju s $T_{PS,i} = t_{si} - t_{pi}$ jednadžba (1) dobiva oblik

$$R_i - c\,T_{PS,i} = 0 \tag{2}$$

Jadnadžba (2) sadrži implicitno četiri nepoznate veličine. To su koordinate x, y, z žarišta i brzina c rasprostiranja fiktivnog vala S–P. Ukoliko se raspolaže opažanjima na samo četiri seizmološke postaje moguće je naći takove vrijednosti x, y, z i c da jednadžba (2) bude zadovoljena za svaki i = 1,..., 4 i analitičko rješenje takvog slučaja prikazno je u (Allegretti i dr., 1984). Raspolaže li se, međutim, opažanjima na pet ili više seizmoloških postaja, općenito ne postoji skup vrijednosti x, y, z i c koji bi zadovoljio jednadžbu (2) za svaki $i = 1,..., N$, $N > 4$, nego vrijedi:

$$R_i - c\,T_{PS,i} = v_i, \qquad i = 1,..., N,\ N > 4 \tag{3}$$

odnosno

$$\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2} - c\,T_{PS,i} = v_i, \qquad i = 1,..., N,\ N > 4 \tag{4}$$

Odstupanje v_i funkcija je izbora vrijednosti x, y, z i c:

$$v_i = v_i\,(x, y, z, c) \tag{5}$$

Rješenje zadataka potražit će se tako da se odredi takav skup vrijednosti x, y, z i c da zbroj kvadrata odstupanja v_i^2 po svim postojama bude minimalan (Čubranić, 1967; Jeffreys, 1961; Marković, 1965).

Ukoliko se pođe od skupa vrijednosti x', y,' z' i c' kao približnih vrijednosti traženih parametara tad se funkcija odstupanja v_i u nekoj okolini te točke može prikazati Taylorovim redom (Marković, 1965):

$$v_i\,(x' + \delta x, y' + \delta y, z' + \delta z, c' + \delta c) = v_i\,(x', y', z', c') +$$

$$+ \frac{\partial v_i}{\partial x}\Big|_{(x',y',z',)} \delta x + \frac{\partial v_i}{\partial y_o}\Big|_{(x',y',z')} \delta y + \frac{\partial v_i}{\partial z}\Big|_{(x',y',z')} \delta z + \frac{\partial v_i}{\partial c} \delta c \tag{6}$$

pri čemu se članovi druge i viših potencija mogu zanemariti, ako se ograniči na područje u kojem su udaljenosti δx, δy, δz i δc dovoljno male.

Parcijalne derivacije u jednadžbi (6) su:

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial x}\right|_{(x',y',z',)} = \frac{x' - x_i}{R'_i}$$

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial y}\right|_{(x',y',z',)} = \frac{y' - y_i}{R'_i}$$

$$\left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{(x',y',z')} = \frac{z'}{R'_i} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial c} = -T_{PS,i}$$

Uvedu li se oznake

$$A_i = \frac{x' - x_i}{R'_i}$$

$$B_i = \frac{y' - y_i}{R'_i}$$

$$C_i = \frac{z'}{R'_i} \qquad (8)$$

$$D_i = -T_{PS,i}$$

$$L_i = R'_i - c' T_{PS,i},$$

za odstupanje se dobiva linearan izraz

$$v_i = L_i + A_i \,\delta x + B_i \,\delta y + C_i \,\delta z + D_i \,\delta c \qquad (9)$$

Potrebno je odrediti vrijednosti δx, δy, δz i δc tako da zbroj kvadrata odstupanja po svim postajama bude minimalan. Kvadrati odstupanja su:

$$\begin{aligned} v_i^2 = {} & L_i^2 + A_i^2 \,\delta x^2 + B_i^2 \,\delta y^2 + C_i^2 \,\delta z^2 + D_i^2 \,\delta c^2 + 2\, L_i A_i \,\delta x + 2\, L_i B_i \,\delta y + 2\, L_i C_i \,\delta z + \\ & + 2\, L_i D_i \,\delta c + 2\, A_i B_i \,\delta x \,\delta y + 2\, A_i C_i \,\delta x \,\delta z + 2\, A_i D_i \,\delta x \,\delta c + 2\, B_i C_i \,\delta y \,\delta z + \\ & + 2\, B_i D_i \,\delta y \,\delta c + 2\, C_i D_i \,\delta z \,\delta c \end{aligned} \qquad (10)$$

Zbrajanjem po svim postajama $i = 1,\ldots, N$ te uz Gaussove oznake $\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i = [x\ y]$ dobiva se zbroj kvadrata odstupanja:

$$\begin{aligned} [v\,v] = {} & [L\,L] + [A\,A]\,\delta x^2 + [B\,B]\,\delta y^2 + [C\,C]\,\delta z^2 + [D\,D]\,\delta c^2 + 2\,[A\,L]\,\delta x + \\ & + 2\,[L\,B]\,\delta y + 2\,[L\,C]\,\delta z + 2\,[L\,D]\,\delta c + 2\,[A\,B]\,\delta x\,\delta y + 2\,[A\,C]\,\delta x\,\delta z + \\ & + 2\,[A\,D]\,\delta x\,\delta c + 2\,[B\,C]\,\delta y\,\delta z + 2\,[B\,D]\,\delta y\,\delta c + 2\,[C\,D]\,\delta z\,\delta c \end{aligned} \qquad (11)$$

Funkcija ima minimum u točci u kojoj iščezavaju parcijalne derivacije po svim varijablama (Marković, 1965), tj.

$$\frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,\delta x} = \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,\delta y} = \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,\delta z} = \frac{\partial\,[v\,v]}{\partial\,\delta c} = 0 \qquad (12)$$

Koristeći taj uvjet dobiva se sustav od četiri linearne jednadžbe sa četiri nepoznanice

$$\begin{aligned}
&[A\,A]\,\delta x + [A\,B]\,\delta y + [A\,C]\,\delta z + [A\,D]\,\delta c + [A\,L] = 0\\
&[A\,B]\,\delta x + [B\,B]\,\delta y + [B\,C]\,\delta c + [B\,D]\,\delta c + [B\,L] = 0\\
&[A\,C]\,\delta x + [B\,C]\,\delta y + [C\,C]\,\delta z + [C\,D]\,\delta c + [C\,L] = 0\\
&[A\,D]\,\delta x + [B\,D]\,\delta y + [C\,D]\,\delta z + [D\,D]\,\delta c + [D\,L] = 0
\end{aligned} \qquad (13)$$

Rješenje tog sustava daje vrijednosti nepoznanica δx, δy, δz, δc. Za koordinate žarišta x, y, z i konstantu c izlazi:

$$\begin{aligned}
x &= x' + \delta y\\
y &= y' + \delta y\\
z &= z' + \delta z\\
c &= c' + \delta c
\end{aligned} \qquad (14)$$

Kako je rezultat ovisan o početnom izboru vrijednosti x, y, z i c, dobivene vrijednosti (14) ne moraju nužno biti i najvjerojatnije u duhu metode najmanje sume kvadrata odstupanja. Stoga je čitav postupak nužno ponoviti uzevši sada nove vrijednosti kao početne. Na taj se način postupak ponavlja (od jednadžbe (7) dalje), sve dok vrijednosti δx, δy, δz, i δc ne postanu dovoljno male da zadovolje točnost koju se zahtijeva od rješenja.

Standardne devijacije σ_x, σ_y, σ_z, i σ_c pojedinih nepoznanica računaju se pomoću ukupne standardne devijacije α, ovako

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\frac{[vv]}{N-4}}\\
\sigma_x &= \frac{\sigma}{\sqrt{p_x}}\\
\sigma_y &= \frac{\sigma}{\sqrt{p_y}}\\
\sigma_z &= \frac{\sigma}{\sqrt{p_z}}\\
\sigma_c &= \frac{\sigma}{\sqrt{p_c}}
\end{aligned} \qquad (15)$$

gdje su v_i odstupanja u odnosu na konačno rješenje. Težine p_x, p_y, p_z i p_c pojedinih nepoznanica definirane su izrazima:

$$p_x = \frac{D}{d_{xx}}$$
$$p_y = \frac{D}{d_{yy}} \tag{16}$$
$$p_z = \frac{D}{d_{zz}}$$
$$p_c = \frac{D}{d_{cc}}$$

pri čemu je D determinanta sustava (13), a d_{xx}, d_{yy}, d_{zz} i d_{cc} njene su subdeterminante koje se dobiju ispuštanjem pripadnog retka i stupca iz determinante D.

Čitav postupak kako je naprijed izložen, primjenljiv je i na podatke od samo četiri postaje. U tom je slučaju moguće takovo rješenje uz koje su jednadžbe (2) zadovoljene za sve četiri postaje. To znači da su i odstupanja v_i, $i = 1, ..., 4$, jednaka nuli te računanje standardnih devijacija kao mjera točnosti rezultata, nije moguće.

Također je vidljivo da se čitav postupak može provesti na potpuno identičan način ako se uzmu u obzir i nadmorske visine postaja. Tad jednadžbe (4) poprimaju oblik:

$$\sqrt{(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 + (z' - z_i)^2} - c' T_{PS,i} = v_i \tag{17}$$

pri čemu su parcijalne derivacije funkcije v_i po dubini žarišta potresa

$$\frac{\partial v_i}{\partial z} = \frac{z' - z_i}{R_i'} = C_i \tag{18}$$

U tom slučaju ravnina $z = 0$ identična je s ravninom nadmorske visine $h = 0$. Ova mogućnost proširuje područje primjene metode K. Wadatija i na slučajeve gdje su razlike u nadmorskim visinama seizmoloških postaja istog reda veličine kao i njihove horizontalne udaljenosti, kao npr. lociranje ishodišta gorskih udara.

3. Primjer

U ovom poglavlju, navest će se postupak određivanja koordinata žarišta i konstante c za potres koji se dogodio 21. listopada godine 1980. u 14 h i 13 m GMT, na osnovi podataka mreže seizmoloških postaja Srednji Vrbas. U tablici 1. dane su geografske koordinate postaja i pripadna vremena $T_{PS} = t_s - t_p$ u sekundama.

Numerički postupak moguće je malo pojednostavniti i prilagoditi radu elektroničkih računala, ukoliko se ishodište pravokutnog koordinatnog sustava postavi u postaju s najmanjom vrijednosti T_{PS} i ako se za početne približne vrijednosti epicentra uzmu koordinate upravo te iste postaje (za ovaj potres to je postaja Bočac). Time su koordinate x' i y' postale jednake nuli, dok koordinatu z' valja držati različitom od nule da ne bi došlo do pojave oblika 0/0 u jednadžbama (8). Također, ovakav izbor početnih koordinata žarišta potresa i ishodišta sustava omogućuje računskom stroju da ih odredi sam za svaku mrežu seizmoloških postaja i potres parametre kojeg se želi računati.

Neka početna približna dubina žarišta bude $z' = 2$ km i konstanta $c' = 7.5$ km/s. Prema izrazima (8) izračunate su vrijednosti koeficijenta A_i, B_i, C_i, D_i, L_i i navedene u tablici 2.

Tablica 1. *Geografske koordinate seizmoloških postaja u stupnjevima i vremena $T_{PS} = t_s - t_p$ putovanja fiktivnog vala S–P.*

Table 1. *Geographycal coordinates in degrees of seismological stations and travel times $T_{PS} = t_s - t_p$ of virtual wave S–P.*

POSTAJA	φ (°N)	λ (°E)	T_{PS} (s)
BOČAC	44.505	17.173	1.0
JAJCE III	44.360	17.322	1.8
ĆUKOVAC	44.568	17.285	1.9
ČAĐAVICA	44.495	16.950	2.9
BANJA LUKA	44.750	17.183	4.2

Tablica 2. *Koeficijenti A_i, B_i, C_i, D_i i L_i za svaku od postaja.*

Table 2. *Coefficients A_i, B_i, C_i, D_i and L_i for seismological stations analyzed.*

POSTAJA	A	B	C	D	L
BOČAC	0	0	1	-0.1	-5.5000
JAJCE III	-0.5883	0.8025	0.0966	-1.8	6.5776
ĆUKOVAC	-0.7716	-0.6119	0.1739	-1.9	-2.7476
ČAĐAVICA	0.9918	0.0620	0.1117	-2.9	-3.8413
BANJA LUKA	-0.0283	-0.9969	0.0732	-4.2	-4.1808

Kvadriranjem i množenjem ovih koeficijenata te zbrajanjem dobivenog, formira se sustav jednadžba (13)

$$1.9259\,\delta x + 0.0897\,\delta y - 0.0841\,\delta z - 0.2324\,\delta c - 5.4407 = 0$$
$$0.0897\,\delta x + 2.0161\,\delta y - 0.0925\,\delta z + 3.7253\,\delta c + 10.8905 = 0$$
$$-0.0841\,\delta x - 0.0925\,\delta y + 1.0580\,\delta z - 2.1410\,\delta c - 6.0578 = 0$$
$$-0.2324\,\delta x + 3.7253\,\delta y - 2.1410\,\delta z + 33.9000\,\delta c + 27.5790 = 0$$

rješenja kojeg su:
$$\delta x = 3.37 \text{ km}$$
$$\delta y = -5.66 \text{ km}$$
$$\delta z = 5.91 \text{ km}$$
$$\delta c = 0.20 \text{ km s}^{-1}$$

pa su pravokutne koordinate žarišta potresa i konstanta c:

$$x = 0 + 3.37 = 3.37 \text{ km}$$
$$y = 0 - 5.66 = -5.66 \text{ km}$$
$$z = 2 + 5.91 = 7.91 \text{ km}$$
$$c = 7.5 + 0.20 = 7.70 \text{ km s}^{-1}$$

Te se vrijednosti uzmu kao početne i iz njih se ponovo računaju koeficijenti A_i, B_i, C_i, D_i i L_i i čitav se postupak ponovi.

Rezultat s točnošću od 10^{-4} dobiva se nakon šest iteracija:

$$x = 3.67 \text{ km}$$
$$y = -5.53 \text{ km}$$
$$z = 4.64 \text{ km}$$
$$c = 7.82 \text{ km s}^{-1}$$

Za te vrijednosti parametara, zbroj kvadrata odstupanja je $[vv] = 0.551$ pa je ukupna standardna devijacija rezultata $\sigma = 0.742$ km. Vrijednost determinante sustava je $D = 29.6546$, a subdeterminante za pojedinu nepoznanicu su:

$$d_{xx} = 21.0478$$
$$d_{yy} = 17.3515$$
$$d_{zz} = 88.0142$$
$$d_{cc} = 1.8764$$

Iznose standardnih devijacija pojedinih nepoznanica lako je izračunati prema jednadžbama (15):

$$\sigma_x = 0.6251 \text{ km}$$
$$\sigma_y = 0.5676 \text{ km}$$
$$\sigma_z = 1.2783 \text{ km}$$
$$\sigma_c = 0.1866 \text{ km s}^{-1}$$

Prijelazom iz pravokutnog u geografski koordinatni sustav dobiva se konačno:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 17.219 \pm 0.008\ ^{\circ}\mathrm{E}\\
\varphi &= 44.455 \pm 0.005\ ^{\circ}\mathrm{N}\\
h &= 4.6 \quad \pm 1.3 \quad \mathrm{km}\\
c &= 7.82 \quad \pm 0.19 \quad \mathrm{km\,s^{-1}}\\
\sigma &= 0.742\ \mathrm{km}
\end{aligned}$$

Račun je proveden na računskom stroju „KOPA 1500" i trajao je šest sekundi.

4. Zaključak

Rješavanjem analitičkog oblika Wadatijevog grafičkog načina određivanja položaja žarišta potresa metodom najmanje sume kvadrata odstupanja, došlo se do jedinstvenog postupka za primjenu te metode na podatke proizvoljnog broja ($N \geqslant 4$) seizmoloških postaja. Pri obradi podataka pet i više postaja, računom standardnih devijacija omogućena je kvantitativna procjena točnosti dobivenih rezultata. Primjenom opisanog postupka također je izbjegnut uvjet da sve postaje moraju ležati u istoj ravnini i omogućeno je uzimanje u obzir nadmorskih visina postaja, što je od znatne važnosti pri analizi podataka mreže seizmoloških postaja postavljenih u vrlo malom području, gdje se razlike u nadmorskim visinama ne mogu zanemariti u odnosu na međusobnu udaljenost postaja (inducirana seizmičnost, gorski udari).

Literatura:

1. Allegretti, I., D. Skoko, M. Živčić (1984), Određivanje osnovnih parametara potresa zamjenom grafičkog postupka K. Wadatija analitičkim (četiri postaje), this volume
2. Čubranić, N. (1967), Teorija pogrešaka i račun izjednačenja, Tehnička knjiga, Zagreb, 391 pp.
3. Jeffreys, H. (1961), Theory of probability, Oxford University Press, 447 pp
4. Marković, Ž. (1965), Uvod u višu analuzu, II dio, Udžbenici Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 660 pp
5. Wadati, K. (1928), Shallow and deep earthquakes, Reprinted from the Geophysical magazine Vol. I, No. 4, 162–202